

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2014
الموضوع

NS 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴻⵔⵉⵜ
ⵜⴰⵎⴻⵔⵉⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵉⵜ
ⵏ ⵜⴰⵎⴻⵔⵉⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵉⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإجازة	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

Bri

التمرين الأول: (3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333 \dots 31}_n$ (n مرة الرقم 3)

0.5 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

0.5 2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$

0.75 4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k-1} \equiv 0 \pmod{31}$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

0.5 5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، إذا كان $n \equiv 1 \pmod{30}$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

0.5 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

0.75 2- احسب $J^2 = J \times J$ حيث : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

3- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (a و b عدنان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a, b)$.

0.5 (أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}), *)$

0.25 (ب) نضع : $E^* = E - \{O\}$. بين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0.5 (ج) بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية.

0.5 4- بين أن : $(\forall (A, B, C) \in E^3) \quad A * (B + C) = A * B + A * C$

0.5 5- استنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي.

Rr

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

ليكن $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ عددا حقيقيا بحيث:

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E) \quad z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

(أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$ 0.25

(ب) اكتب على الشكل المثالي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$. 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحقها على التوالي 1 و -1 و $e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ و $e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$ و $\sqrt{2}e^{i\theta}$

(أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان. 0.5

(ب) ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

(ج) استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

(أ) اعط الصيغة العقدية للدوران r . 0.25

(ب) تحقق أن لحن النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$ 0.5

(ج) بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان. 0.25

4- حدد لحن النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $(-\vec{v})$ 0.25

5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

(ب) أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

2- أ) بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ 0.25

(ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

Re

0.5 ج) بين أن: $f'(\alpha) = 0$ $(\exists \alpha \in]0,1[)$

0.5 د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

0.5 1-أ) تحقق أن: $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ $(\forall t \in [1, +\infty[)$

1 ب) بين أن: $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ $(\forall x \in [1, +\infty[)$

(لاحظ أن: $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$)

1 ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

0.5 2-أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ثم احسب $F'(x)$

0.25 ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$

0.5 III-1-أ) بين أن: $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$ $(\forall t \in]0, +\infty[)$

0.25 ب) بين أن: $f(t) \leq \frac{1}{e}$ $(\forall t \in [0, +\infty[)$

0.25 ج) استنتج أن: $F(x) < x$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in]0,1[$ و $u_{n+1} = F(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 أ) بين أن: $u_n \in]0,1[$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة.

0.5 ج) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الخامس: (2 نقط)

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0, +\infty[$ ، نضع $L(x) = \int_0^x g(t) dt$

(أ) بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

(ب) احسب $L(x)$ من أجل $x > 0$ 0.25

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$ 0.5

3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بين أن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.5

انتهى